Matice

Základní terminologie:

- Matice **A** typu **(m,n) je** schéma (m krát n) čísel sestavených do **m řádku** o **n sloupcích**.

$$A(m,n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A_{mn}$$

- Matice **A typu (m,m)** se nazývá **čtvercovou maticí** m-tého řádu (m-tého stupně).
- Prvky a_{11}, a_{22}, a_{33}… tvoří **hlavní diagonálu** matice, nazývají se **hlavní prvky**.
- Prvky a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}… tvoří **vedlejší diagonálu** matice.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cdots & a_{1n-1} & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \cdots & \boldsymbol{a_{2n-1}} & a_{2n} \end{pmatrix}$$

- **Jednotková matice** je matice, ve které se všechny prvky hlavní diagonály rovnají jedné, zatímco ostatní prvky jsou nulové. **Značí se E**. Platí A × E = E × A = A
- **Diagonální matice** je <u>čtvercová</u> matice, ve které jsou prvky na hlavní diagonále nenulové, zatímco ostatní prvky se rovnají nule.
- **Nulová matice** je matice, ve které se všechny prvky rovnají nule.
- **Levá (dolní) trojúhelníková matice** je matice, ve které jsou všechny prvky nad hlavní diagonálou nulové.
- **Pravou (horní) trojúhelníková matice** je matice, ve které jsou všechny prvky pod hlavní diagonálou nulové.
- **Transponovaná matice** je matice překlopená podle hlavní diagonály. Značí se A^T

$$\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ \mathbf{8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi:

- **Rovnost matic** (A=B)
  - Matice jsou rovny právě tehdy, když jsou si rovny prvky na odpovídajících si místech.

$$A(m,n) = B(m,n) \Leftrightarrow \forall i,k\colon a_{ik} = b_{ik}$$

- **Sčítání matic** (A + B = C)
  - Sčítat lze pouze matice o **stejných rozměrech**, výsledkem matice stejného rozměru
  - Sčítání matic je **komutativní i asociativní**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{9} \\ \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5+2} & \mathbf{8+5} & \mathbf{1+9} \\ \mathbf{7+6} & \mathbf{2+3} & \mathbf{3+4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 10 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

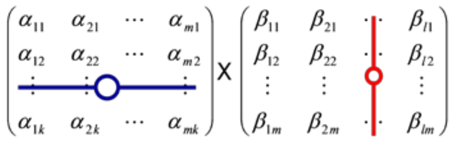
- **Odčítání matic** (A - B = C)
  - Odčítat lze pouze matice o **stejných rozměrech**, výsledkem matice stejného rozměru
  - Odčítání matice **není komutativní ani asociativní**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{9} \\ \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5-2} & \mathbf{8-5} & \mathbf{1-9} \\ \mathbf{7-6} & \mathbf{2-3} & \mathbf{3-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -8 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Násobení matice <u>číslem</u>** (k · A = B)
  - Násobení matice **<u>čísly</u> je komutativní i asociativní**

$$\mathbf{7} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{7\cdot 5} & \mathbf{7\cdot 8} & \mathbf{7\cdot 1} \\ \mathbf{7\cdot 7} & \mathbf{7\cdot 2} & \mathbf{7\cdot 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 56 & 7 \\ 49 & 14 & 21 \end{pmatrix}$$

- **Násobení dvou matice** (A × B = C)
  - Násobit lze pouze matice s rozměry A(m,n) × B(n,j) = C(m,j)
    - Počet sloupců první matice musí být stejný, jako počet řádků druhé
    - Výsledkem je matice s počtem řádků první matice a počtem sloupců z druhé



  - Násobení <u>dvou matic</u> **není komutativní**, ale **je asociativní i distributivní!**

A × (B × C) = (A × B) × C A × (B + C) = A×B + A×C

$$\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{9} & \mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5\cdot 2+8\cdot 5+1\cdot 9} & \mathbf{5\cdot 6+8\cdot 3+1\cdot 4} \\ \mathbf{7\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 9} & \mathbf{7\cdot 6+2\cdot 3+3\cdot 4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 & 58 \\ 51 & 60 \end{pmatrix}$$

Elementární úpravy matic:

- Prohozením řádků (sloupců)
- Vynásobením řádku (sloupce) nenulovým číslem
- Přičtením nebo odečtením jednoho řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci)
- Přidáním či vynecháním řádku (sloupce), který je lineární kombinací jiného

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice:

- Hodností matice nazýváme maximální počet na sobě nezávislých lineárních řádků (sloupců)

$$h = h(A) = h(A^T)$$

- Hodnost matice se provedením elementárních úprav nezmění.
- Hodnost spočítáme Gaussovou eliminační metodou (pomocí elementárních úprav).
  - Hodnost je počet nenulových řádků

$$h\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \qquad h\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = 2$$

Inverzní matice:

- Inverzní matice k <u>čtvercové</u> matici A(m,m) je taková matice, pro kterou platí A × A^{-1} = E
- Pokud hodnost matice je menší, jak její řád, inverzní matice neexistuje

$$h(A_{mm}) = m \Leftrightarrow \exists A^{-1}$$

- Inverzní matici zjistíme pomocí jednotkové matice a elementárních úprav:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Determinant matice:

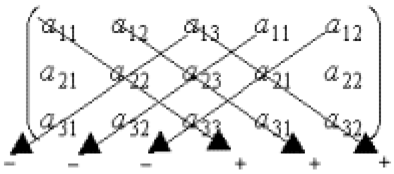
- Počítáme **pouze u čtvercové** matice
- Základní poznatky:
    - det(E) = 1
    - det(A×B) = det(A) · det(B)
    - det(A^T) = det(A)
    - det(A) = 0 právě tehdy, když je jeden z řádků matice lineární kombinací jiného
- Elementární úpravy matic:
    - **Prohozením** dvou sousedních řádků (sloupců) determinant **změní znaménko**
    - **Vynásobením řádku** (sloupce) nenulovým číslem **k zvýší** determinant matice **k-krát**
    - Přičtením libovolného řádku k jinému se determinant nezmění
    - Je-li řádek matice lineární kombinací zbylých řádků, pak je determinant roven nule

Výpočet determinantu:

- **Matice 2x2**

$$\boldsymbol{det(A)} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

- **Matice 3x3**
    - Sarrusovo pravidlo (připíšeme si první dva sloupce na konec matice a sčítáme násobky



$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

- **Matice m x m**: pomocí rozvoje determinantu podle řádku či sloupce
    - **Laplaceův rozvoj** neboli **Kofaktorová metoda**
    - Před výpočtem pomocí rozvoje se pokusíme pomocí elementárních úprav matici zjednodušit (pozor: použitím úprav se determinant mění, viz. výše)

$$\boldsymbol{det(A)} = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_{ik}} \cdot (\boldsymbol{-1})^{\boldsymbol{i+k}} \cdot \boldsymbol{det(A_{ik})}$$

    - Subdeterminant A_{ik} je determinant matice A, ve které vynecháme i-tý řádek a k-tý sloupec
    - Pro výpočet jednotlivých subdeterminantů lze opět využít rozvoj podle řádku
    -

$$\begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{7} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{10} & \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & -5 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 5 & 0 & 10 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \left(1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 5 & 10 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \cdots \right) = 2 \begin{vmatrix} 9 & 5 & 10 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{92}$$

Řešení soustav lineárních rovnic pomocí matic:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2} \\ \boldsymbol{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3} \end{aligned} \quad = \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix}}_{\text{Matice soustavy}} \overbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}}^{\text{Sloupec neznámých}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{b_3} \end{pmatrix}}_{\text{Sloupec pravých stran}}$$

$$\left.\boldsymbol{A'} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} & \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} & \boldsymbol{b_3} \end{array}\right) \quad \right\} \text{Rozšířená matice soustavy}$$

- **Frobeniova věta** o počtu řešení:
  - Soustava lineárních rovni je řešitelná právě tehdy, když hodnost matice soustavy A je stejná, jako hodnost soustavy A‘.
    - Pokud h(A) = h(A‘) = řád matice (počet řádků), poté má soustava právě jedno řešení
    - Pokud h(A) = h(A‘) < řád matice, poté má soustava nekonečně mnoho řešení
    - Pokud h(A) ≠ h(A‘), pak soustava rovnic nemá žádné řešení

- **Cramerovo pravidlo** pro výpočet řešení pomocí determinantů:
  - Pokud determinant matice je nenulový det(A) ≠ 0, pak soustava rovnic má právě jedno řešení (x_1, x_2, x_3…), a to:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

  - Determinant det(A_i) je determinant matice soustavy, kde je i-tý sloupec nahrazen sloupcem pravých stran

- **Gaussova eliminační metoda:**
  - Pomocí elementárních úprav se snažíme vytvořit na levé straně rozšířené soustavy matic jednotkovou matici, na pravé straně poté získáme řešení soustavy

$$\begin{aligned} x + 3y &= 7 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{10} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Zdroje a užitečné odkazy:

- Prezentace k projektu Cesta k vědě (autor: Vladimír Pospíšil – http://veda.gymjs.net/)
- Multimediální kurz Ostravské univerzity (http://artemis.osu.cz/mmmat/)